

Fișă de lucru

Teorema celor trei perpendiculare.

Nume: _____ Clasa: _____ Data: _____

Scrie rezolvările complet, pas cu pas, justificând fiecare etapă. Se acordă 90 de puncte în total. Toate lungimile sunt exprimate în centimetri (cm), iar unghiurile în grade. Folosește teorema celor trei perpendiculare acolo unde este necesar.

1 Exercițiul 1 – Recunoașterea configurației

12 p

Fie un plan α și un punct A din afara planului. Fie B proiecția ortogonală a lui A pe planul α , deci $AB \perp \alpha$. Fie d o dreaptă cuprinsă în planul α , iar C piciorul perpendicularei duse din B pe d (deci $BC \perp d, C \in d$).

1. Identifică proiecția ortogonală a punctului A pe planul α și justifică de ce $AB \perp \alpha$.
2. Aplică teorema celor trei perpendiculare și demonstrează că $AC \perp d$.
3. Dacă $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, calculează AC .

2 Exercițiul 2 – Reciproca teoremei celor trei perpendiculare

15 p

Fie planul α și punctul A exterior planului. Fie B proiecția ortogonală a lui A pe α (deci $AB \perp \alpha$). Fie $d \subset \alpha$ o dreaptă și $C \in d$ astfel încât $AC \perp d$.

1. Enunță reciproca teoremei celor trei perpendiculare.
2. Demonstrează, folosind reciproca, că $BC \perp d$.
3. Dacă $AC = 13$ cm și $AB = 5$ cm, calculează BC și distanța de la B la dreapta d .

3 Exercițiul 3 – Aplicație pe piramidă regulată triunghiulară

18 p

Fie piramida regulată $VABC$ cu baza ABC triunghi echilateral cu latura $a = 6$ cm și cu înălțimea $VO = 4$ cm, unde O este centrul bazei. Fie M mijlocul laturii BC .

1. Justifică de ce $VO \perp (ABC)$.
2. Arată că $AM \perp BC$ (mediana și înălțimea din A în triunghiul echilateral coincid).
3. Aplică teorema celor trei perpendiculare și demonstrează că $VM \perp BC$.
4. Calculează lungimea VM .

4 Exercițiul 4 – Problema cu paralelipipedul dreptunghic

20 p

Fie paralelipipedul dreptunghic $(ABCD A'B'C'D')$ cu $(AB = 3)$ cm, $(BC = 4)$ cm și $(AA' = 12)$ cm.

1. Arată că $(BB' \text{ perp } (ABCD))$.
2. Arată că $(BC \text{ perp } CD)$ în planul bazei.
3. Aplică teorema celor trei perpendiculare pentru a demonstra că $(B'C \text{ perp } CD)$.
4. Calculează lungimea $(B'C)$.

5 Exercițiul 5 – Unghi dintre o dreaptă și un plan

13 p

Fie planul α și punctul A exterior planului. Proiecția ortogonală a lui A pe α este B , cu $AB = 6$ cm. Fie $C \in \alpha$ astfel încât $BC = 8$ cm. Fie d dreapta BC , cu $BC \perp AB$.

1. Demonstrează că $AC \perp d$ folosind teorema celor trei perpendiculare (direct).
2. Calculează AC și $\cos(\hat{ACB})$.
3. Fie $D \in \alpha$ cu $BD = 6$ cm și $BD \perp BC$. Calculează AD și demonstrează că $AD \perp BC$.

6 Exercițiul 6 – Problemă de sinteză cu piramidă patrulateră regulată

12 p

Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu baza $ABCD$ pătrat cu latura $a = 8$ cm și înălțimea $VO = 3$ cm, unde O este centrul bazei. Fie M mijlocul laturii AB .

1. Justifică de ce $VO \perp (ABCD)$.
2. Arată că $OM \perp AB$ în planul bazei.
3. Demonstrează, folosind teorema celor trei perpendiculare, că $VM \perp AB$.
4. Calculează OM , VM și apotema feței triunghiulare VAB .

Total: **90 puncte** · Timp recomandat: 45 min · Se acordă 10 puncte din oficiu.